DOCUMENTO DE APOYO Nº2

EMER
NEUQUÉN

LOS CONCEPTOS BÀSICOS DE LA TEORÌA DE CONJUNTOS

Regionalización del Currículum

PROVINCIA DEL NEUQUÉN
BANCO INTERAMERICANO DE DESARROLLO
MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN

PROGRAMA DE EXPANSIÓN Y MEJORAMIENTO DE LA EDUCACIÓN RURAL

Guer 4
Do 4045

MINISTERIO DE GOBIERNO, EDUCACIÓN Y JUSTICIA
CONSEJO PROVINCIAL DE EDUCACIÓN
UNIDAD EJECUTORA PROVINCIAL

Prof. María A. PARNISARI de MORA

El presenté trabajo, se elaboró como respuesta a las necesidades de capacitación sobre este tema, manifestadas en distintas circunstancias por los docentes de la Provincia. Consiste en el desarrollo de los conceptos fundamentales de la "Teoría de Conjuntos", requeridos para la comprensión e implementación de las Bases Curriculares. Posee como objetivo acercar al docente la información teórica básica a partir de la cual pueda orientar la investigación sobre el tema y encauzar su autoformación. Esto implica que los distintos aspectos tratados, aunque abarcan la totalidad del campo conceptual de los Lineamientos Curriculares, están formulados sintéticamente y requerirán ser ampliados y enriquecidos por parte del maestro.

ÍNDICE

.. INTRODUCCIÓN

Los conceptos básicos de la matemática clásica son organizados en un *nuevo sistema de conceptos* que trata fundamentalmente de simplificarlos y estructurarlos en base a una teoría: la *TEORÍA DE CONJUNTOS*. Este nuevo sistema de conceptos conduce a lo que se llama *"enfoque conjuntista"* en la enseñanza.

Este enfoque debe respetar las siguientes condiciones:

1) "Que sea GENUINO O AUTÉNTICO, es decir, sea adaptado en forma recta y cabal y no consista en símples agregados .. sobrepuestos a la enseñanza tradicional no conjuntista.
Todo "enfoque" híbrido conduce a la imprecisión y al caos, e incluso a una incoherente mezcla de lenguajes.

2) Que sea *SISTEMÁTICO*, de lo contrario resulta a la postre inútil y hasta nocivo, pues genera más confusión que orientación.

3) Que sea realmente *CONSECUENTE*. Una vez adoptado este enfoque, toda la enseñanza debe quedar impregnada por sus cauces normativos. Sería insensato exigir al alumno el esfuerzo intelectual necesario para asimilar, por ejemplo el concepto conjuntista de "función" y luego no usar esta poderosa herramienta para estructurar y simplificar los contenidos de la enseñanza" (1)

(1) TREJO, César. *"El enfoque conjuntista en la enseñanza de la matemática"*. Editorial Kapeluz. Pgs. 15/16.

Ahora bien, este enfoque conjuntista se caracteriza por:

* dar coherencia y estructura a la matemática al integrarla en un nuevo *sistema* de conceptos.
* dar al lenguaje matemático una mayor sencillez y precisión, evitando ambiguedades.
* dar al aprendizaje de la matemática una secuencia gradual, permitiéndole al alumno ir asimilando un *TODO*, con *UNIDAD*, lógicamente estructurado.
* dar importancia a la acción con los objetos, teniendo en cuenta que las nociones matemáticas surgen de lo que "hacemos" con los objetos; no están ni en los objetos ni en los sujetos.
* dar énfasis al establecimiento de relaciones, como principio para construir la estructura matemática.
* unificar los conceptos dados en la matemática clásica, en forma aislada, carentes de significado. Por ejemplo: dentro del álgebra de conjuntos el "*concepto de intersección*" integra los de "mínimo común múltiplo", "intersección de ángulos", o "intersección de planos para determinar figuras", y otros.

1- NOCIONES FUNDAMENTALES

Frente a la multiplicidad de objetos que nos presenta la realidad, surgen intuitivamente las ideas de *CONJUNTO Y ELEMENTO* .

Conjunto y elemento son considerados conceptos primitivos o conceptos fundamentales de la teoría, y como tal, se aceptan sin definir. Esto, debido a que todo concepto se define con conceptos anteriores, y previo al concepto de *conjunto* y *elemento* no existe en esta teoría ningún otro concepto.

1.1- DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Al conjunto se lo puede mencionar haciendo uso de distintas formas: *COLOQUIAL*, *SIMBÓLICA Y POR REPRESENTACIÓN*.

En forma *COLOQUIAL* es cuando se lo expresa naturalmente, de manera *oral o escrita*, sin respetar convenciones.

Por ejemplo:

a) Alumnos de este grado.
(conjunto expresado por COMPRENSIÓN)

b) Amalia, Carina, Verónica, Claudia, ...
(conjunto expresado por ENUMERACIÓN O EXTENSIÓN)

Entonces, un conjunto está expresado por *COMPRENSIÓN* cuando queda determinado por una propiedad común que caracteriza a todos sus elementos. Un conjunto está expresado por *EXTENSIÓN* cuando se enumeran uno a uno sus elementos.

En forma *SIMBÓLICA* es cuando se lo expresa por escrito teniendo en cuenta las siguientes convenciones:

a) Cuando está expresado *por extensión*, se denota con una letra mayúscula colocando entre llaves los nombres o símbolos de los elementos separados por coma.

b) Cuando está expresado por *comprensión* también se denota con una letra mayúscula colocando entre llaves la *propiedad común* que identifica a todos sus elementos.

Por ejemplo:

$$A = \left\{ x/x \text{ es natural dígito mayor que } 4 \right\}$$
(expresado por comprensión)

Nota: Se lee A igual al conjunto de los elementos x, tal que x es natural dígito mayor que 4.

$$A = \left\{ 5; 6, 7, 8, 9 \right\}$$
(expresado por extensión)

Para expresar conjuntos *por extensión* se debe tener en cuenta que:

a) los elementos iguales no se repiten.

Por ejemplo:

$$M = \left\{ x/x \text{ es letra de la palabra "mamá"} \right\}$$
(expresado por comprensión)

$$M = \left\{ m, a \right\}$$
(expresado por extensión)

b) Se puede variar el orden de los elementos, siempre que éste no se haya *pre-establecido*.

Por ejemplo:

$$T = \{x/x \text{ es vocal}\}$$

$$T = \{a, e, i, o, u\}$$

ó $$T = \{e, i, a, o, u\}$$

En cambio si el orden se ha *establecido* sería:

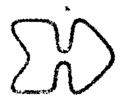
$$T = \{x/x \text{ es vocal en el orden de aparición de acuerdo al alfabeto}\}$$

$$T = \{a, e, i, o, u\}$$

Ahora bien, cuando vinculamos un elemento a un conjunto surge la *relación de pertenencia*. Para indicar que un elemento *PERTENECE* a un conjunto, escribimos:

$5 \in A$ (en el caso del ejemplo anterior)

y, si NO PERTENECE escribimos: $3 \notin A$



La tercera forma de mencionar un conjunto es por *REPRESENTACIÓN*. Los conjuntos se pueden representar en forma *concreta* o *gráfica*.

Concreta: es cuando se rodean con un hilo o cuerda sobre el banco, la mesa, el piso, el escritorio, determinados elementos concretos.

Gráfica: es cuando se dibujan los elementos y el diagrama (cuerda o hilo) sobre la hoja de papel o pizarrón. O cuando se dibuja el diagrama y algún tipo de símbolos convenidos por el alumno y el maestro para representar los elementos, como por ejemplo: cruces, puntos, triángulos, etc.)

Es decir, el diagrama NO es el conjunto mismo, sino su representación.

Es importante poder establecer sin duda y *sin ambigüedad* si un objeto es o no un elemento de un conjunto. De lo que se deduce que: *"un conjunto está BIEN DETERMINADO o EXPRESADO cuando se puede decir con exactitud si un elemento pertenece o no a él".*

Los siguientes son ejemplos de conjuntos bien expresados:

$A = \{ x/x$ es alumno de este grado que usa anteojos $\}$

$B = \{ x/x$ es alumno de este grado que mide más de 1,50m de estatura $\}$

$C = \{ x/x$ es número natural impar menor que 6 $\}$, etc.

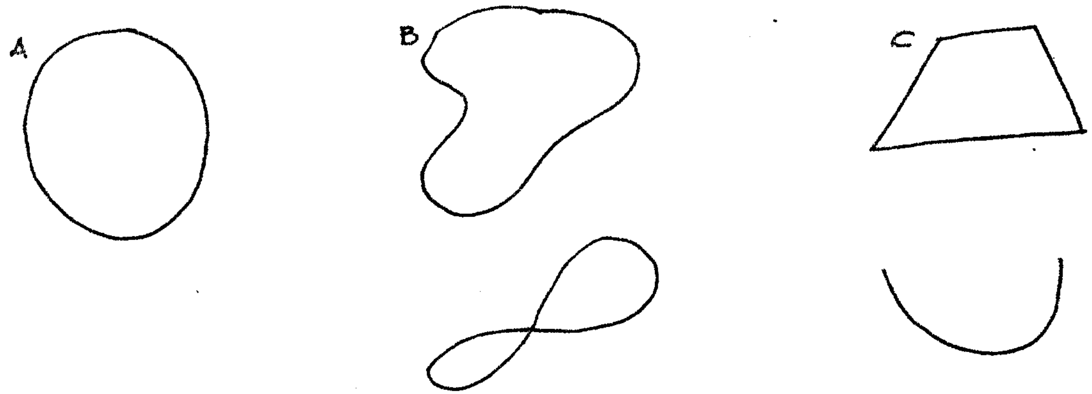
Los siguientes son ejemplos de conjuntos expresados con ambiguedad:

$B = \{ x/x$ es rojo $\}$

$C = \{ x/x$ es buen alumno $\}$

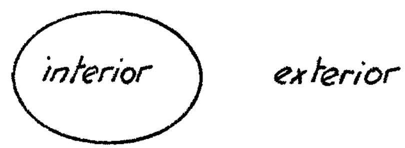
$D = \{ x/x$ es agradable $\}$; etc.

El diagrama más usado es el de *Euler-Venn*. Este es una línea curva cerrada, una curva que no se corta a si misma. Dicha curva puede tener varias formas, como ser:



no puede ser "ni cortada" "ni abierta"

Ahora bien, al dibujar un diagrama quedan delimitadas dos regiones, una interior y otra exterior:



Los elementos de un conjunto se representan en la región interior y los que no pertenece a él, en la región exterior. En ningún caso los elementos se representan -- sobre la curva.

1.2- CLASIFICACIÓN DE CONJUNTOS

Los conjuntos se pueden clasificar de la siguiente manera:

A- <u>Conjuntos finitos:</u> son aquellos en los que se puede precisar el número de elementos.

Por ejemplo:

$$M = \{x/x \text{ es mes del año}\}$$

(se pueden expresar por comprensión y extensión y son los que más se emplean en el nivel primario)

B- <u>Conjuntos infinitos:</u> son aquellos en los que no se puede precisar el número de elementos.

Por ejemplo:

$$N = \{x/x \text{ es número natural}\}$$

(en general son expresados por comprensión)

Dentro de estas dos clases básicas de conjunto, se encuentran los siguientes *conjuntos especiales*:

Conjunto vacío: es aquel que carece de elementos.

Por ejemplo:

$B = \{ x/x$ es alumno del 1° ciclo que tiene 4 años $\}$
(expresado por comprensión)

$B = \{ \}$ expresado por extensión.

se simboliza: $\emptyset$ o sea $B = \emptyset$

Conjunto unitario: es aquel que tiene solo *un* elemento.

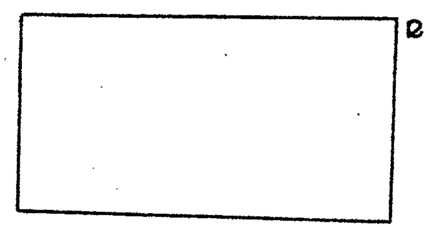
Por ejemplo:

$E = \{ x/x$ es mes de 28 días $\}$

$E = \{ \text{febrero} \}$

Conjunto referencial o universal:

es el formado por todos los elementos del tema de referencia y se representa graficamente de la siguiente manera:



Nota: convencionalmente se usa un diagrama rectangular para representar al conjunto referencial o universal.

Un ejemplo de conjunto referencial sería el siguiente:

$U = \{ x/x \text{ es objeto de este aula} \}$

A partir de un conjunto referencial se pueden formar otros conjuntos.

Por ejemplo:

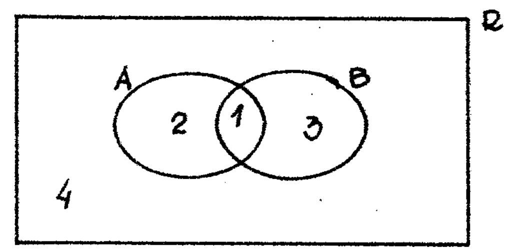
$A = \{ x/x \text{ es pizarrón} \}$

$B = \{ x/x \text{ es escritorio} \}$; etc.

Habiendo visto hasta aquí, como se mencionan y clasifican los conjuntos se tratarán ahora las distintas formas de representarlos en diferentes situaciones concretas.

Primera situación: dos conjuntos que tienen elementos comunes

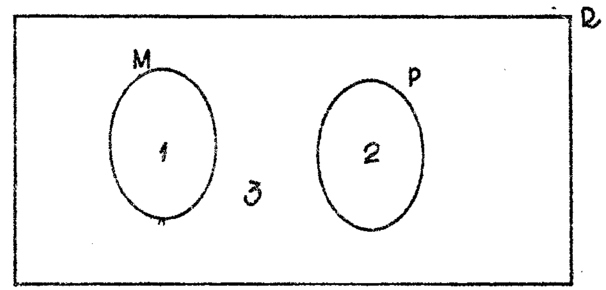
Si consideramos un conjunto referencial R y dos subconjuntos A y B tales que tengan algunos elementos comunes, su representación es la siguiente:



Este gráfico muestra que A y B se *intersecan* determinando *4 regiones* en el plano. Cada región representa un conjunto y por lo tanto ésta representación gráfica, permitirá analizar la relación de pertenencia de elementos a cada región.

Los elementos representados en la región 1 pertenecen a la vez al conjunto A y B. En cambio los elementos representados en la región 2, pertenecen al conjunto A pero no al B. Los de la región 3 pertenecen al conjunto B pero no al A. Los elementos representados en la región 4 no pertenecen a A ni a B.

<u>Segunda situación: dos conjuntos que no tienen elementos comunes</u>

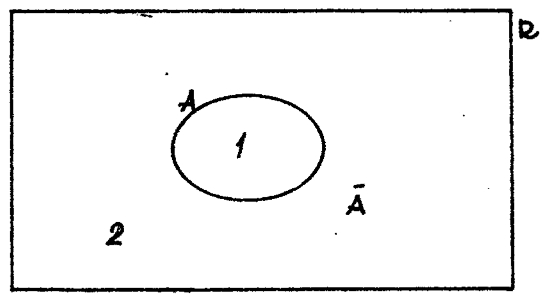


Con respecto al gráfico de la situación anterior ha desaparecido una región, -- la de los elementos comunes a M y P. Hay determinadas 3 regiones.

Decimos entonces que los conjuntos que no tienen elementos comunes se llaman -- *CONJUNTOS DISJUNTOS*.

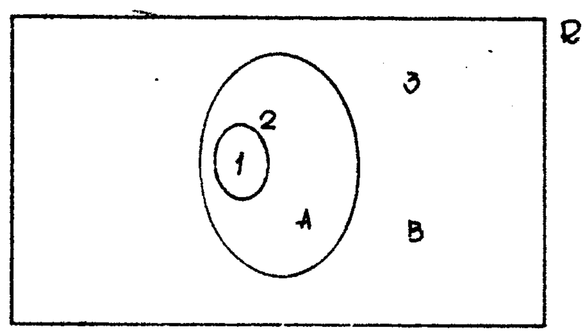
Por lo tanto M y P son disjuntos.

Tercera situación: un conjunto y su complemento



Si observamos ahora este otro gráfico podemos deducir que han quedado determinadas dos regiones. En la región 2 están representados todos los elementos del referencial que no pertenecen al conjunto A y se le llama *CONJUNTO COMPLEMENTO DE A*, y se simboliza: $\bar{A}$

Cuarta situación: un conjunto incluido en otro



En esta situación se puede observar que todos los elementos de A pertenecen al conjunto B; decimos entonces que A está *INCLUIDO* en B y se simboliza: $A \subset B$

De esta última situación se desprende que:

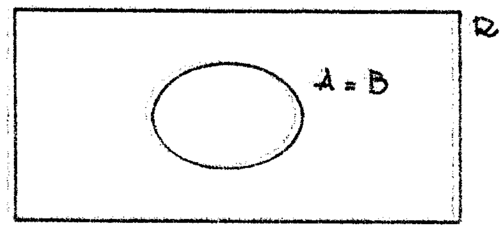
* La relación de inclusión se define sobre la base de la relación de pertenencia.

* Existen elementos de B que no pertenecen a A.

* Han quedado determinadas 3 regiones. La región 1 es parte de la región 2, por lo tanto la región 1 (conjunto A) es una *SUBREGION* de la región 2. El conjunto A (región 1) es un subconjunto de B.

Quinta situación: un conjunto igual a otro

Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$; A tiene los mismos elementos que B. Esta igualdad debe entenderse como identidad o sea que A y B representan al mismo conjunto.



Nota: los diagramas de A y B se superponen.

A partir del concepto de inclusión, surge el concepto de *PARTES DE UN CONJUNTO*.
Es decir, si $A \subset B$, entonces decimos que A es una *PARTE* de B o un *SUBCONJUNTO* de B.
Al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos, se le denomina *CONJUNTO DE PARTES DEL CONJUNTO O FAMILIA DE PARTES*.
Si consideramos por ejemplo al conjunto:

$B = \{a, b, c\}$, al conjunto de partes de B o familia de partes de B lo simbolizamos de la siguiente forma: $P_{(B)}$ siendo sus elementos *todos* los subconjuntos de B.

$$P_{(B)} = \{\{a,b,c\}; \{a,b\}; \{b,c\}; \{a,c\}; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{\emptyset\}\}$$

Nótese aquí además que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

Sintetizando este punto sobre las nociones fundamentales de esta teoría podemos decir:

1- Los conjuntos deben mencionarse ya sea en forma oral o escrita, simbólica o gráfica, de manera tal que sus elementos estén *bien determinados*.

2- Unicamente nos referimos a *pertenencia* o *no pertenencia* cuando hablamos de elementos en relación a conjuntos; y a *inclusión* o *no inclusión* cuando hablamos de conjuntos en relación a otro conjunto.

3- Los elementos del conjunto de partes de un conjunto o familia de partes, son a su vez, conjuntos.

2- <u>ÁLGEBRA DE CONJUNTOS</u>

2.1- CONCEPTO

El álgebra de conjuntos implica la totalidad de las operaciones lógicas no necesariamente numéricas, o sea, no limitadas a las cuatro operaciones aritméticas fundamentales.

Es decir, cuando el niño resuelve situaciones, por ejemplo quitando o agregando elementos, está operando entre conjuntos en forma algebraica sin el empleo de números.

En este trabajo hablamos de álgebra de conjuntos cuando hacemos referencia a las operaciones entre los mismos. Estas son *unión, intersección, complemento y diferencia.*

2.2. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Las operaciones entre conjuntos se deben definir en relación a un mismo conjunto universal o referencial R.

Si tenemos por ejemplo dos conjuntos A y B, podemos definir:

A) *La unión* de A con B: $A \cup B = \{ x/x \in A \vee x \in B \}$, esta expresión simbólica de la unión se entiende como: "*el conjunto de todos los elementos de A, todos los elementos de B y los comunes a A y B.*

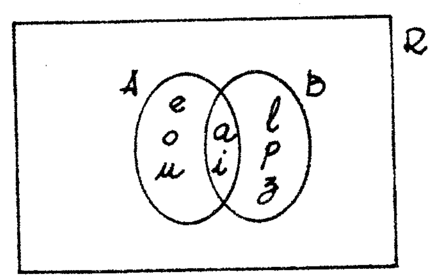
Por ejemplo:

$A = \{ x/x \text{ es vocal} \}$

$B = \{ x/x \text{ es letra de la palabra "lápiz"} \}$

$A \cup B = \{ a, e, i, o, u, l, p, z \}$

Visualizado por medio de un díagrama de Venn:



B) *La intersección de A y B:* $A \cap B = \{ x/x \in A \wedge x \in B \}$, esta expresión simbólica de la intersección se entiende como: *"los elementos que pertenecen a A y a B, es decir los comunes"*

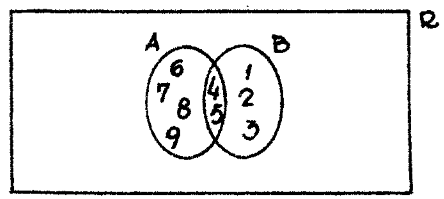
Por ejemplo:

Si consideramos $A = \{ x/x$ es dígito mayor que $3 \}$ y

$B = \{ x/x$ es dígito menor que $6 \}$

$A \cap B = \{ 4, 5 \}$

Visualizado por medio de un diagrama de Venn:



Nota: La intersección de dos conjuntos disjuntos es vacía.

Por ejemplo:

Si $A = \{3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\} \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$

c) *La diferencia de A y B:* $A - B = \{ x/x \in A \wedge X \notin B \}$, esto se entiende como: los elementos de A que no pertenecen a B. O sea, los elementos que sólo pertenecen a A.

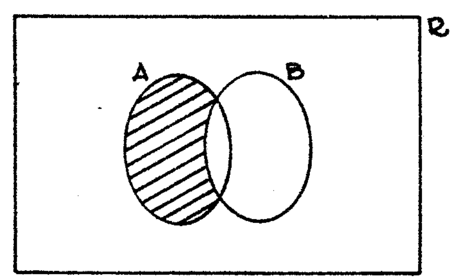
Por ejemplo:

$$A = \{ x/x \text{ es número natural} \}$$

$$B = \{ x/x \text{ es número natural par} \}$$

$$A - B = \{ \text{es número natural impar} \}$$

Visualizada por medio de un diagrama de Venn:



D) *El complemento de A es* $\bar{A} = R - A = \{ x/x \in R \wedge x \notin A \} = \{ x/x \notin A \}$, esto se interpreta como: todos los elementos del referencial que no pertenecen al conjunto A.

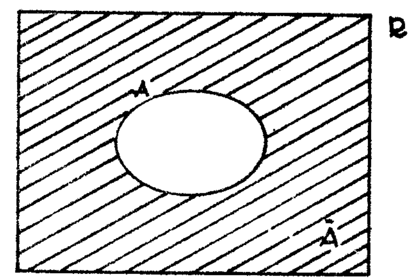
Por ejemplo:

$R = \{ x/x$ es alumno de esta escuela $\}$

$A = \{ x/x$ es alumno de 3° ciclo $\}$

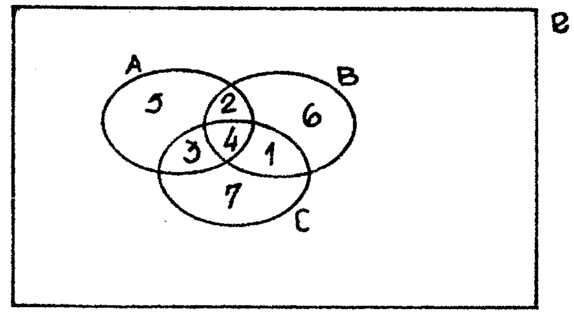
$\bar{A} = \{$ es alumno de 1° y 2° ciclos $\}$

Visualizado por medio de un diagrama de Venn:



Ahora bien, cuando trabajamos con *tres* conjuntos hacemos uso del *DIAGRAMA DE LA HOJA DE TRÉBOL.*

Si consideramos por ejemplo los conjuntos A, B, C, se determinan 8 regiones y gráficamente es:



Este diagrama sirve para deducir las propiedades de las operaciones.

(Por ejemplo: la propiedad asociativa de la intersección: $(A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cap C$).

Además permite ejercitar la pertenencia o no de un elemento a una región.

Región 1: x pertenece a A, a B y a C $\Rightarrow$ $x \in A \cap B \cap C$
(x es elemento común a los 3 conjuntos)

Región 2: x pertenece a A y a B pero no pertenece a C $\Rightarrow$ $x \in (A \cap B) - C$

Región 3: x pertenece a A y a C pero no pertenece a B $\Rightarrow$ $x \in (A \cap C) - B$

Región 4: x pertenece a B y a C pero no pertenece a A $\Rightarrow$ $x \in (B \cap C) - A$

Región 5: x pertenece a A pero no pertenece a B ni a C $\Rightarrow$ $x \in A - (B \cup C)$

Región 6: x pertenece a B pero no pertenece a A ni a C $\Rightarrow$ $x \in B - (A \cup C)$

Región 7: x pertenece a C pero no pertenece a A ni a B $\Rightarrow$ $x \in C - (A \cup B)$

Región 8: x no pertenece a A ni a B ni a C $\Rightarrow$ $x \notin A \cup B \cup C$ (x pertenece al complemento de la unión de los 3 conjuntos), $x \in R - (A \cup B \cup C)$ o sea $x \in (A \cup B \cup C)$

Cada una de estas regiones representa el resultado de determinadas operaciones entre los conjuntos A, B, C.

Por ejemplo:

Región 1 = $A \cap B \cap C$

Región 2 = $(A \cap B) - C$

Región 3 = $(A \cap C) - B$

Región 4 = $(B \cap C) - A$

Región 5 = $A - (B \cup C)$

Región 6 = $B - (A \cup C)$

Región 7 = $C - (A \cup B)$

Región 8 = $R - (A \cup B \cup C)$

3- TEORÍA DE LAS RELACIONES

Diariamente nos referimos a relaciones de tipo: "*es primo de*", "*es más alto que*", "*tiene más hermanos que*", etc. y estamos relacionando elementos de un conjunto de personas. Pero son comunes también las relaciones: "*nació en*" ..., "*vive en*" ...,donde se relacionan elementos de distintos conjuntos: en este caso personas y ciudades.

Se deduce entonces que *toda relación se puede establecer entre los elementos de un mismo conjunto o entre elementos de distintos conjuntos.*

Las relaciones se denominan binarias cuando se vinculan dos elementos de un mismo conjunto o de distintos conjuntos determinando pares ordenados de elementos; entonces podemos decir que *toda relación binaria es un conjunto de pares ordenados.*

Las relaciones se representan con flechas que unen dos elementos ($x \curvearrowright y$) entre los cuales existe una determinada relación "R", y se simboliza de la siguiente manera:

$$"x \quad R \quad y"$$

Para definir una relación se deben tener en cuenta los siguientes ítems:

a) Definir el o los conjuntos en que se aplicará, y establecer sin ambiguedad la relación.

Por ejemplo: es correcto decir:

$$A = \left\{ x/x \text{ es alumno de este grado} \right\}$$

R : *"x es más alto que y"*

y, no es correcto el siguiente ejemplo:

$$A = \left\{ x/x \text{ es alumno de este grado} \right\}$$

R : *"x es mas buena que y"*

Indudablemente la aplicación de esta última relación dependerá de una apreciación subjetiva.

b) Todo par (x, y) de elementos, debe verificar una y solo una de las siguientes --- alternativas:

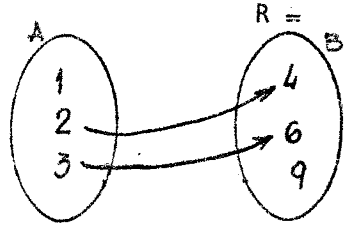
* el par verifica la relación.
* el par no verifica la relación.

Por ejemplo:

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y

$B = \{4, 6, 9\}$ y

$R =$ *"es mitad de"*



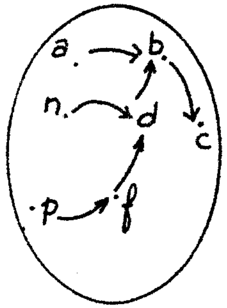
Solo los pares (2; 4) y (3; 6) verifican la relación y escribimos:

$$A \; R \; B = \{(2; 4), \quad (3; 6)\}$$

Hasta aquí, algunas consideraciones generales sobre la teoría de las relaciones. Veamos ahora en forma más detallada las relaciones entre los elementos de un mismo conjunto y entre los elementos de distintos conjuntos.

3.1- RELACIONES ENTRE ELEMENTOS DE UN MISMO CONJUNTO

Analicemos este tipo de relación a través del siguiente ejemplo: en un conjunto de hombre y mujeres definimos la relación "tiene como padre a", que se representa de la siguiente forma.



tiene como padre

(la relación se lee en el sentido de la flecha)

Este gráfico puede interpretarse teniendo en cuenta la aplicación de la relación - de la siguiente manera: "a tiene como padre a b" , "b tiene como padre a c", "n tiene como padre a d", "p tiene como padre a f", "f tiene como padre a d", y "d tiene como - padre a b"

Surgen entonces los siguientes interrogantes:

1- ¿puede ir una flecha de b hacia a?
2- ¿puede trazarse una flecha de a hacia c?
3- ¿pueden llegar dos flechas a un mismo punto?
4- ¿pueden partir dos flechas de un mismo punto?
5- ¿qué elementos son *sin duda* del sexo masculino?
6- ¿qué letras simbolizan a hermanos?
7- ¿qué letras simbolizan a padres?
8- ¿qué letras simbolizan a abuelos?
9- ¿hay alguna letra que simbolice a un bisabuelo?
10- ¿puede una flecha partir de un elemento y volver al mismo elemento?

RESPUESTAS:

1- NO. (b no tiene como padre a a)
2- NO. (a tiene como abuelo a c)
3- SI. (a y d tienen como padre a b)
4- NO. (una persona no puede tener como padre a 2 personas del mismo sexo)
5- b, c, d, f, que son padres
6- a y d (tienen el mismo padre que es b)
7- b, c, d, f.
8- c (abuelo de a y d), b (abuelo de f), d (abuelo de p)
9- c (de f y n), b (de p)
10- NO. (nadie es padre de si mismo)

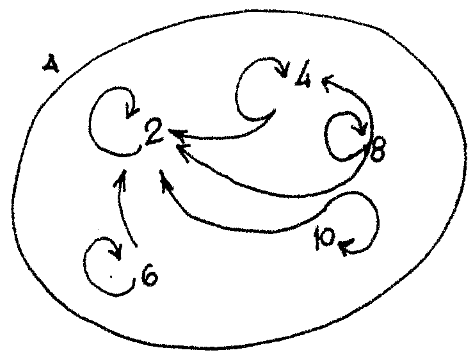
Estas relaciones familiares se pueden establecer de la misma manera con los números.

Por ejemplo:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

R = "... es múltiplo de ..."

En diagrama sería:



De este ejemplo se desprenden dos propiedades:

* refleja
* transitiva

La propiedad refleja: se grafica con un bucle gráfico , e indica en este caso que todo número es múltiplo de sí mismo.

O sea: 6 es múltiplo de 6

La propiedad transitiva: se grafica indica en este caso que si un número es múltiplo de otro y este es múltiplo de un tercero, el primero es múltiplo del tercero.

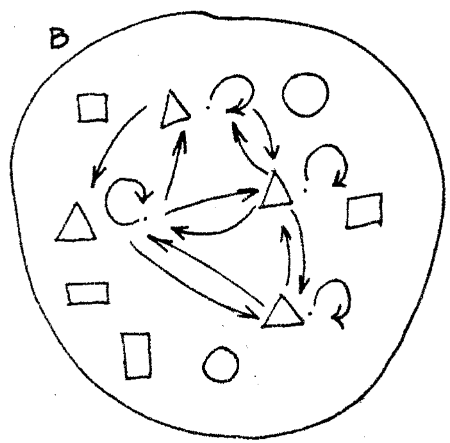
O sea que, si 8 es múltiplo de 4 y 4 es múltiplo de 2, entonces 8 es múltiplo de 2.

En pares ordenados: (8; 4), (4; 2) $\Rightarrow$ (8; 2)

Veamos ahora un ejemplo con los bloques de Dienes:

- Consideremos a B como el conjunto de bloques y definimos R" ... tiene la misma forma que ... "

En diagrama



Nota: se realiza el diagrama para los triángulos al solo efecto de clarificar la situación, pero se verifica de igual forma para los cuadrados, rectángulos, y círculos.

O sea que, la R "tiene la misma forma que" ... Verifica las tres propiedades siguientes:

* refleja: "todo triángulo tiene la misma forma que sí mismo"
* transitiva: "si un triángulo tiene la misma forma que otro y éste tiene la misma forma que un 3°, el 1° tiene la misma forma que el 3°"
* simétrica: "si un triángulo tiene la misma forma que otro, éste tiene la misma forma que el primero"
  Esta última se grafica

En consecuencia:

Toda relación que verifique estas tres propiedades es una relación de EQUIVALENCIA

La relación que no verifica la propiedad simétrica y verifica la propiedad transitiva es una relación de ORDEN.

3.1.1- Partición de Conjuntos

A partir de las relaciones de equivalencia surge el concepto *de PARTICIÓN DE UN CONJUNTO EN CLASES DE EQUIVALENCIA.*

Además, este concepto está ligado íntimamente al de clasificación, porque cuando clasificamos aplicamos una relación de equivalencia.

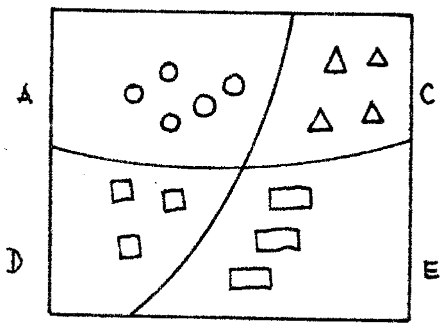
Por ejemplo:

"tiene el mismo color que", "tiene el mismo tamaño que", etc.

Al realizar la clasificación se ha producido una PARTICION DEL CONJUNTO. Por lo tanto todo conjunto se particiona en clases de equivalencia.

Si consideramos la relación de equivalencia del ejemplo anterior "tiene la misma forma que" el conjunto sufrirá una partición. Por un lado tenemos los bloques cuadrados y por otro los triangulares, etc. resultando así las siguientes *clases de equivalencias*:

R = B



A: clase de los bloques circulares

C: clase de los bloques triangulares

D: clase de los bloques cuadrados

E: clase de los bloques rectangulares

Se deduce de ésto que en toda partición:

- Los subconjuntos (conjuntos partes) no tienen ningún elemento en común (o sea que la $\cap$ de cualquiera de ellos es el $\emptyset$).

- Ninguno de los subconjuntos son vacíos.

- La unión de los subconjuntos da como resultado el conjunto R (referencial).

  $A \cup C \cup D \cup E = B$ (en el caso del ejemplo anterior).

3.2- RELACIONES ENTRE ELEMENTOS DE DISTINTOS CONJUNTOS

Si consideramos por ejemplo los siguientes conjuntos:

$A = \{ x/x \text{ es número natural dígito impar} \}$

$B = \{ y/y \text{ es dígito del número } 358 \}$

y definimos la relación:

R = "x es mayor que y"

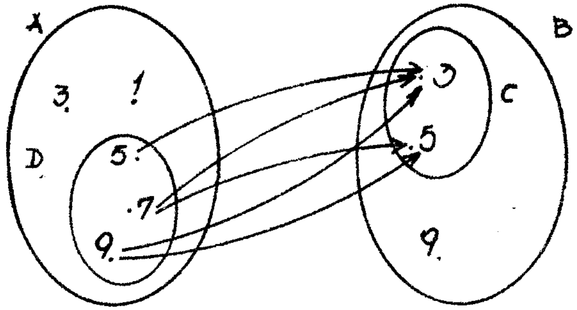
entonces:

$A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

$B = \{ 3, 5, 8 \}$

Veremos que:

un elemento del conjunto A se relaciona con los elementos de B siempre que verifique la relación.



La flecha $\cdot \curvearrowright \cdot$ equivale a la expresión "es mayor que".

De lo anterior se deduce que han quedado determinados *PARES ORDENADOS* (x, y) en dónde "x" simboliza los elementos del primer conjunto e "y" los del segundo conjunto que satisfacen la relación, o sea:

$$A\ R\ B = \left\{ (5;\ 3),\ (7;\ 3),\ (7;5),\ (9;\ 3),\ (9;\ 5) \right\}$$

Los elementos del primer conjunto que intervienen en la relación, determinan el - sunconjunto D.

$$D = \left\{ 5,\ 7,\ 9 \right\}$$

Este subconjunto se llama DOMINIO DE LA RELACIÓN

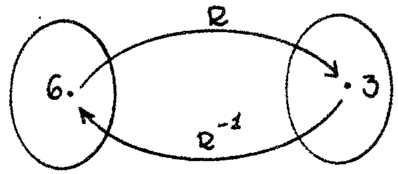
Los elementos del segundo conjunto que intervienen en la relación, determina el -- subconjunto C.

$C = \{3,\ 5,\}$

Este subconjunto se llama CODOMINIO DE LA RELACIÓN o IMAGEN, y de acuerdo al ejemplo se dice que el elemento (5) del primer conjunto tiene como imagen al elemento (3) del segundo conjunto, a 7 le corresponden 2 imágenes, el 3 y el 5 etc.

Ahora bien, en todo *par ordenado* es importante tener en cuenta el *orden* de sus -- elementos para que verifiquen una relación. Por ejemplo, en una relación "es doble de" un par que la verifica es (6; 3); si cambia el orden de los elementos (3; 6) se verifica la relación inversa "es mitad de".

La RELACIÓN INVERSA de R se designa R^{-1} , y se grafica:



Hemos analizado anteriormente de que manera se establecen las relaciones. Veremos ahora, un caso particular de relación que contiene a todas las relaciones entre dos - conjuntos, denominado PRODUCTO CARTESIANO.

3.2.1- <u>El Producto Cartesiano</u>

Se puede definir de la siguiente manera:

Dados 2 conjuntos A y B, se llama producto cartesiano al conjunto de TODOS los pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in B$

se simboliza: $A \times B$

Por ejemplo:

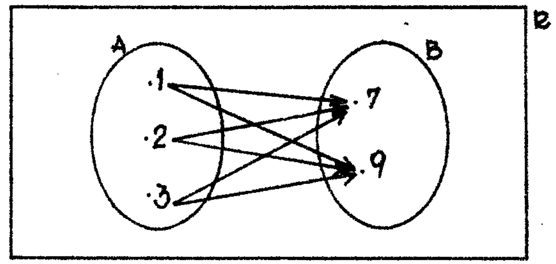
Si $A = \{1, 2, 3\}$ y

$B = \{7, 9\}$ entonces

$$A \times B = \{(1; 7), (1; 9), (2; 7), (2; 9), (3; 7), (3; 9)\}$$

Ahora bien el producto cartesiano se puede representar a través de distintas formas:

a) por medio de *diagramas de Venn:*

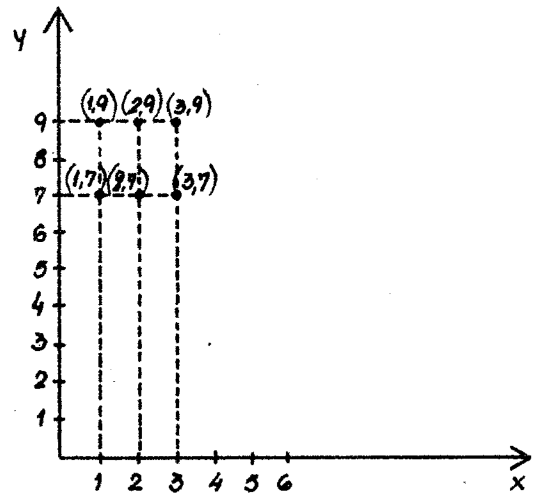


b) por medio de *tablas de doble entrada*

B \ A	1	2	3
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)
9	(1,9)	(2,9)	(3,9)

Nota: los elementos de A se indican en forma horizontal y los elementos de B se indican en forma vertical.

c) Por medio de un sistema *de ejes cartesianos*, de forma tal que cada par ordenado — del producto cartesiano quede representado por un punto en el plano que determinan dichos ejes.



Se deduce entonces que:

> en el producto cartesiano cada elemento del primer conjunto está relacionado *siempre con todos* los elementos del segundo conjunto.

3.2.2- Relaciones que son funciones

Se define FUNCIÓN como:

Toda relación que verifique, que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del codominio.

En un gráfico de funciones se ve que de todo punto del dominio parte a lo sumo -- una sola flecha.

Una función se simboliza:

$$y = F(x)$$

que significa que por la función "F", los elementos "x" (del dominio) se *transforman* en los elementos "y" (del codominio).

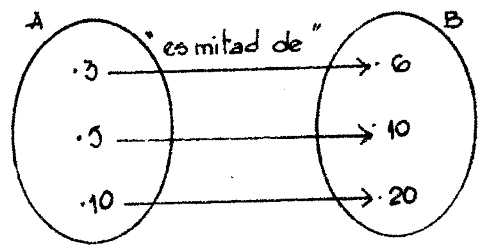
Por ejemplo:

Si, F es "x es mitad de y" definida en un conjunto.

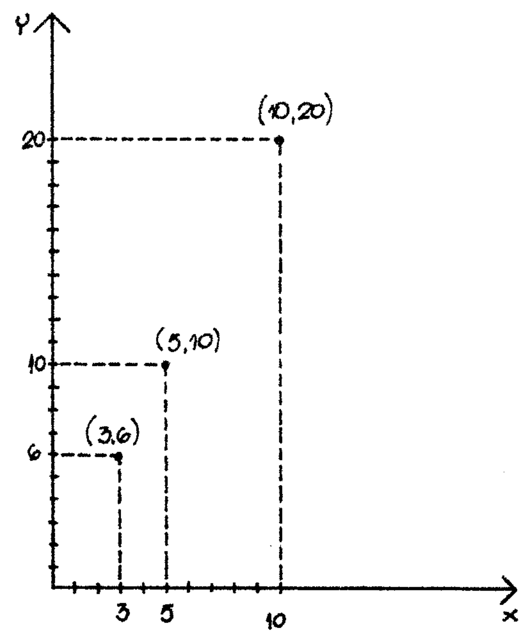
$A = \{3, 5, 10\}$

$B = \{6, 10, 20\}$

Se ve entonces que, la función transformó el 3 en 6, el 5 en 10 y el 10 en 20, en diagrama:



en ejes cartesianos:



Simbólicamente por extensión:

$$F_{(x)} = \{(3;\ 6),\ (5;\ 10),\ (10;\ 20)\}$$

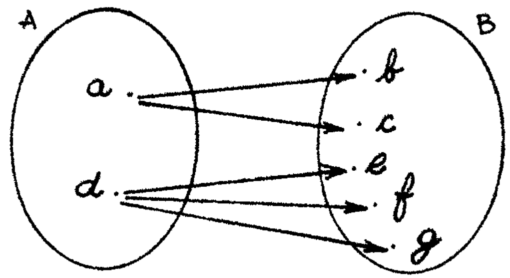
Nota: También se puede representar una función en ejes cartesianos como lo indicado para producto cartesiano.

PERO ...

No todas las relaciones son funciones

Esto se puede ver a través del siguiente ejemplo:

La relación "... es padre de ..." entre los conjuntos A y B tiene como representación el siguiente diagrama:



y se interpreta: a es padre de b y c y d es padre de e, f, g,

Se ve entonces que, a un elemento del conjunto A le corresponden distintos elementos del conjunto B. D a salen 2 flechas y de d salen 3.

De aquí se deduce que, el ejemplo anterior es una relación pero no una función, pues volviendo al concepto de función, a un elemento de A (para ser función) le correspondería solo un elemento de B.

3.3- GEOMETRÍA TOPOLÓGICA

Hasta no hace mucho tiempo, en el campo de la matemática predominaban dos tipos de geometría: la métrica o euclidiana y la proyectiva. En las últimas décadas a éstos dos tipos de geometría se le agregó otra rama: la geometría topológica.

"La geometría euclidiana que es la primera que se desarrolló, trata los problemas y las propiedades de las figuras de naturaleza ideal: la línea recta, las superficies enmarcadas por figuras (triángulos, cuadrados, circunferencia, etc.). Decimos ideal porque todas ellas son el resultado de una abstracción, tal como suponer que una línea no tiene espesor, que el punto no tiene superficie, que todos los puntos de una línea recta siguen una misma dirección, etc.

La geometría proyectiva surge con posterioridad a la geometría euclidiana; no estudia como ésta a los cuerpos en sus formas intrínsecas, sino en las que adquieren cuando se los observa desde distintos lugares o se los imagina en distintas posiciones.

Finalmente nace le geometría topológica, cuyo objeto de estudio no es la forma con que los cuerpos aparecen ante nuestra vista o imaginación, sino que se refiere a sus transformaciones, a las propiedades que de ellas se derivan y a las leyes que las gobiernan.

Se trata del caso más general de las geometrías, donde las líneas no interesan - por sus dimensiones o por su naturaleza, rectas o curvas; igualmente pierden importancia los ángulos y los vértices ..." (1)

"... Para la geometría topológica, la línea interesa sólo como límite divisorio entre dos superficies y su forma (los ángulos que puede formar) son casos particulares de uno más general que es el de ser *límite*. Lo general, y de ello es de lo que - trata la geometría topológica, son las cualidades que están determinadas por relaciones como las siguientes: abierto, cerrado; adentro o afuera; cerca o lejos; arriba, abajo; delante, detrás; etc." (2)

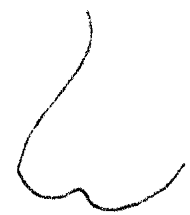
3.3.1- Nociones Topológicas

Las primeras relaciones espaciales que concibe el niño son de orden topológico - (adentro-afuera), ya que éstas tienen un carácter muy general. Por lo tanto, al presentarsele figuras o formas (cuadrados y círculos) las confundirá pero en cambio distinguirá bien si una figura es abierta o cerrada.

(1) y (2) BOSCH L. y MENEGAZZO. Colección de Autoinstrucción N° 2. Ed. Latina. Pág. 85, 86.

Estas primeras relaciones se denominan *intuiciones* topológicas y se transforman en *nociones* topológicas cuando el niño aprende los siguientes conceptos:

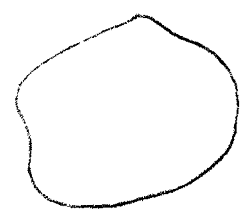
a- *Curvas abiertas*: (que pueden ser simples y cruzadas)



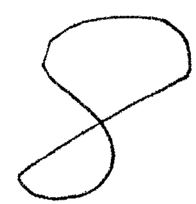
curva abierta
simple

curva abierta
cruzada

b- *Curvas cerradas*: también pueden ser simples y cruzadas.



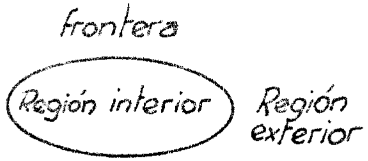
curva cerrada
simple
(son las utilizadas para representar los conjuntos)



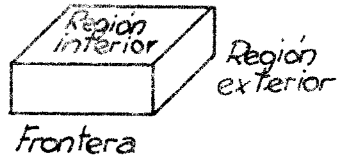
curva cerrada
cruzada

c- *Fronteras - regiones*: se llama frontera a la línea o superficie que delimita dos - regiones una interior y otra exterior a ella.

(1)



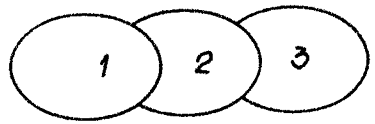
(2)



(1) La línea delimita las regiones.

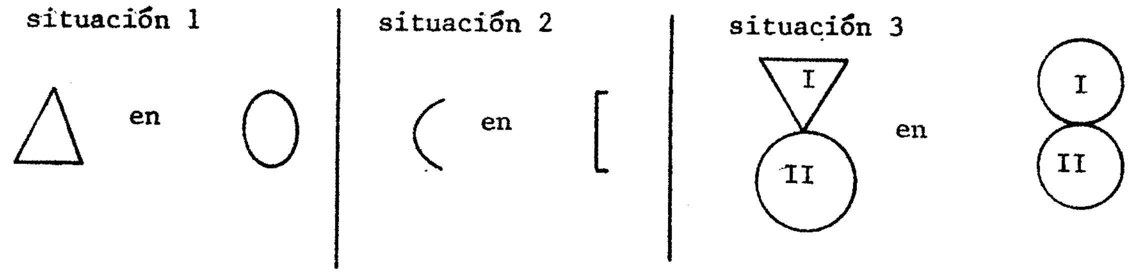
(2) La superficie delimita las regiones.

d- *Frontera común a dos regiones*: es la parte común de dos regiones.



Ahora bien, en toda transformación topológica se deben respetar las siguientes relaciones espaciales:

a) CIERRE: una línea cerrada se transforma en otra línea cerrada; y una abierta en otra abierta.



es decir que, han permanecido INVARIABLES las regiones interiores y exteriores.

b) VECINDAD: los puntos y regiones vecinas (o fronteras) siguen siéndolos aún después de la transformación (ver situación 3).

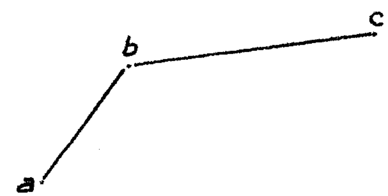
c) CONTINUIDAD: a infinitos puntos de la figura original, le corresponden infinitos puntos en la figura transformada.

3.4- POLÍGONOS

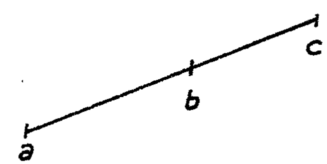
Para acceder al concepto de polígonos, son necesarias las nociones de: curvas, región interior y exterior, vistas anteriormente, y además las que se dan a continuación, segmentos consecutivos y poligonales.

Segmentos consecutivos:

Dos segmentos son consecutivos cuando tienen solamente un extremo común.



(a)



(b)

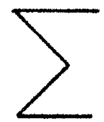
* $\overline{ab}$ es consecutivo a $\overline{bc}$ porque tienen a "b" como extremo común.

* en (a) los segmentos se dicen NO COLINEALES (en diferentes direcciones)

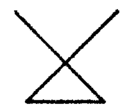
* en (b) los segmentos se dicen COLINEALES (en una misma dirección).

Poligonales:

Una poligonal está constituída por 3 ó más segmentos no colineales. Se clasifican igual que las curvas, en abiertas y cerradas y éstas a su vez, pueden ser simples y cruzadas.

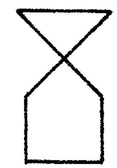


Poligonal abierta simple



Poligonal abierta cruzada

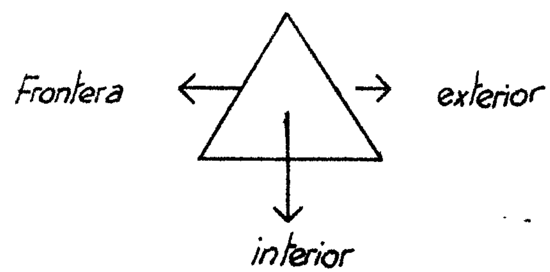
Poligonal simple cerrada



Poligonal cerrada cruzada

Entonces, las poligonales simples *cerradas* determinan en el plano dos regiones, una interior y otra exterior.

$\boxed{\text{La poligonal es la frontera}}$



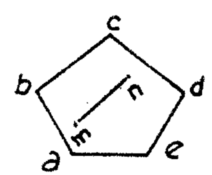
Ahora estamos en condición de definir POLÍGONOS:

Es la unión de una poligonal cerrada simple y su correspondiente región interior

Los polígonos pueden ser:

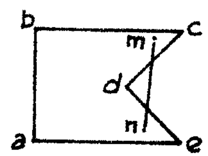
* CÓNCAVOS y
* CONVEXOS

Un polígono es CONVEXO cuando al unir dos puntos de su región interior, el segmento determinado está *siempre* incluído en él.



$\overline{mn} \subset$ polígono a, b, c, d, e.

Un polígono es CÓNVAVO cuando la unión de dos puntos de su región interior determina un segmento que *no siempre* está incluído en él.



$\overline{mn} \not\subset$ polígono a, b, c, d, e.

Clasificación de los polígonos:

El vocablo polígono quiere decir muchos ángulos, poli: muchos, gono: ángulos. Teniendo en cuenta lo anterior la clasificación será:

* Polígono de 3 ángulos ⟶ Triángulo
* Polígono de 4 ángulos ⟶ Cuadriángulo
* Polígono de 5 ángulos ⟶ Pentágono
* Polígono de 6 ángulos ⟶ Hexágono
* etc.

Si se hace referencia *únicamente* a sus lados, sin tener en cuenta sus puntos interiores hablamos de:

* triláteros
* cuadriláteros
* multiláteros

son los elementos fronteras de un polígono.

Es decir que, por ejemplo:

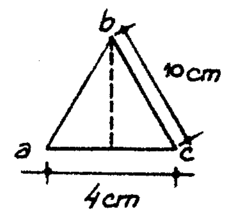
Se llama triángulo a la unión de los puntos del trilátero y los puntos interiores a él.

3.4.1- Relación de equivalencia entre superficies de figuras

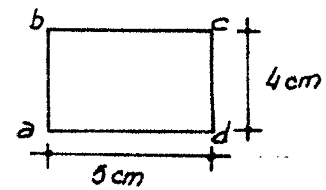
Si se dice que dos conjuntos son equivalentes cuando tienen el mismo número de elementos, entonces se puede afirmar que dos polígonos son equivalentes cuando tienen la *misma superficie*. Un triángulo es equivalente a un cuadrado que tenga la misma superficie y la relación "... tiene la misma superficie que ..." es una relación de equivalencia.

Por ejemplo:

- Un triángulo de 4 cm de base por 10 cm de altura es equivalente a un rectángulo de 5 cm de base por 4 cm de altura, porque ambos tienen 20 cm2 de superficie.



es equivalente a



O SEA QUE ...

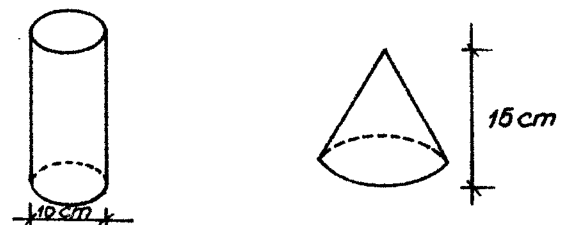
"La superficie de un rectángulo equivale a la superficie de 2 triángulos de su *misma base y altura*.

3.5- CUERPOS: RELACIONES DE EQUIVALENCIAS ENTRE VOLÚMENES DE CUERPOS

En los cuerpos, la equivalencia se establece en relación con el volumen. El volumen de un cilindro equivale a 3 veces el volumen de un cono de su --- misma base y altura.

Por ejemplo:

Si tenemos un cilindro de 15 cm de altura por 10 cm2 de superficie de la base y un cono de la misma base y altura.



El volúmen del cilindro = 3 x volúmen del cono 1,177,5 cm3 = 3 x 392,5

Sugerencia metodológica:

Es importante trabajar en base a equivalencias para la deducción de fórmulas de - superficies de figuras y volúmenes de cuerpos.

4- DESARROLLO DE UN TEMA: CONCEPTO DE FRACCIÓN

Las fracciones se estudian con respecto a un *objeto* y a un *conjunto*. Anteriormente se trataba este tema generalmente sobre la base de un objeto, descuidándose su relación con los conjuntos.

Fracción de un objeto:

* mitad de la hoja de cuaderno
* cuarto de la tiza

Fracción de un conjunto:

* mitad de este conjunto de niños
* cuarto de este conjunto de 16 lápices

El concepto de fracción se puede clarificar con el siguiente ejemplo:

Sea "C" un conjunto de 32 niños de este grado

+ 16 son varones y 16 son mujeres
+ 8 varones usan anteojos
+ 4 niñas usan cintas en el cabello

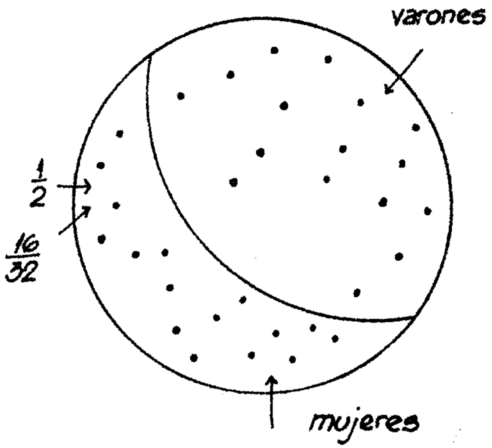
* indicar con dos fracciones que representen al mismo conjunto:

a) al conjunto de mujeres

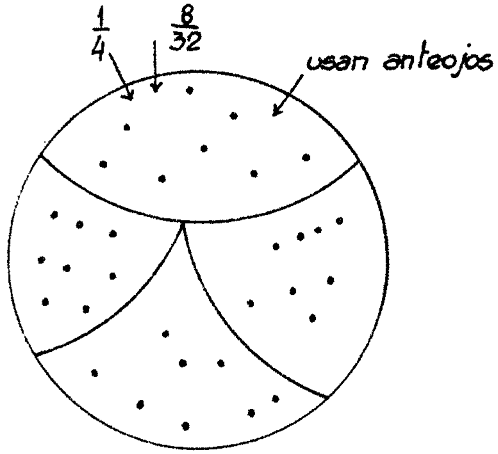
b) al conjunto de los niños que usan anteojos

c) al conjunto de las niñas que usan cintas en el cabello

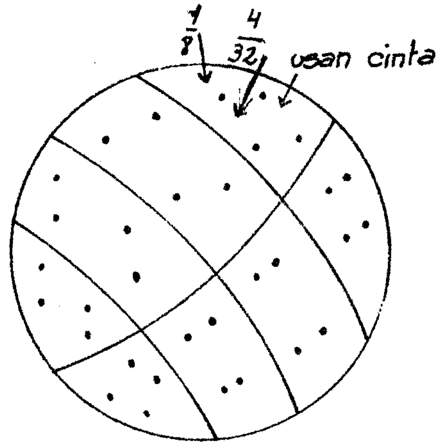
Graficando esta situación por medio del diagrama de Venn para una mayor comprensión - sería:



(a)



(b)



(c)

a) 1/2 nos indica que la mitad del conjunto son mujeres, que *equivale* a decir que 16 de 32 niños son mujeres (16/32).

b) 1/4 nos indica que la cuarta parte del conjunto usa anteojos, que *equivale* a decir que 8 de 32 usan anteojos (8/32).

c) 1/8 nos indica que la octava parte del conjunto son niñas que usan cinta en el cabello, que *equivale* a decir que 4 niñas de 32 usan cinta (4/32).

Se deduce de lo anterior que:

1/2 es equivalente a 16/32

1/4 es equivalente a 8/32

1/8 es equivalente a 4/32

Se ha introducido así el concepto de <u>FRACCIONES EQUIVALENTES</u>

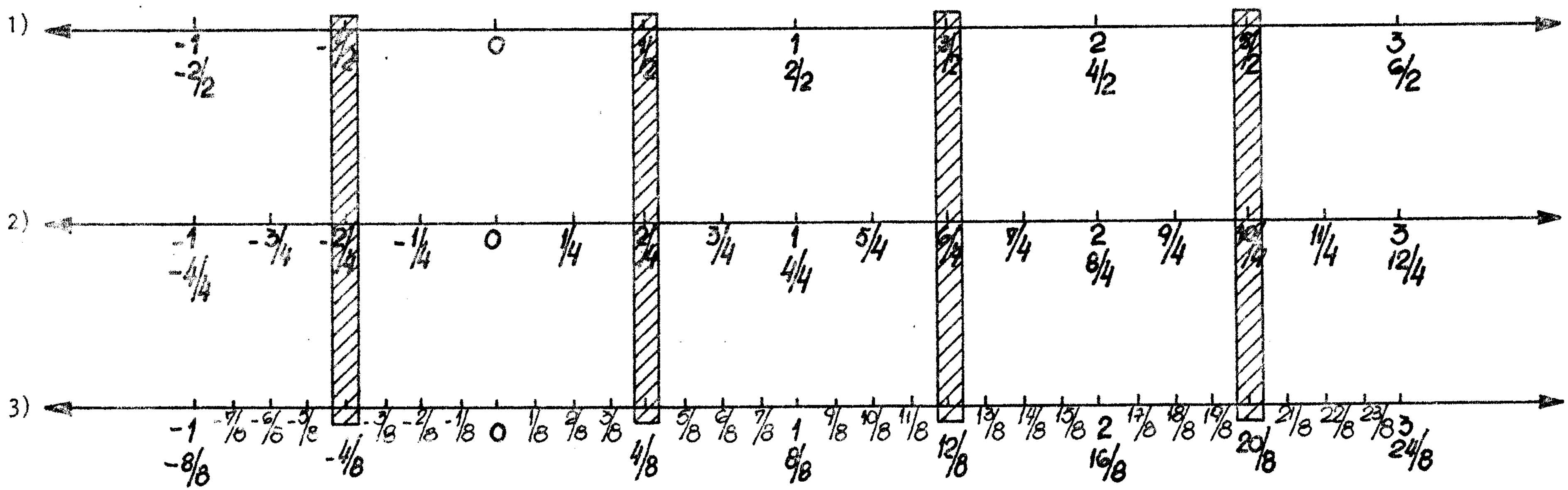
A las fracciones se las puede ubicar en una recta numérica racional.

Se considera, entonces:

1) La recta numérica de los medios, que permite ubicar:

2) La recta de los cuartos que permite ubicar:

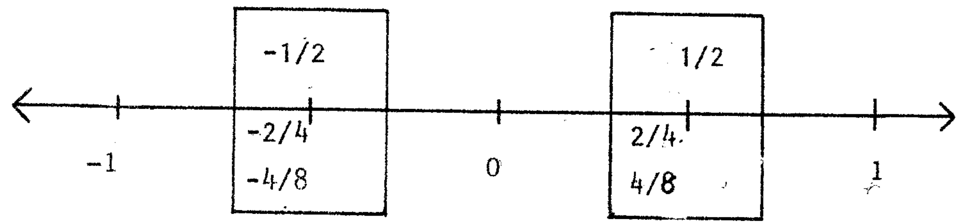
3) La recta de los octavos que permite ubicar:



Se puede deducir entonces que en *un mismo punto* de la recta racional están representadas un conjunto de fracciones equivalentes..

- -1/2, -2/4 y -4/8 ... son un conjunto de fracciones equivalentes
- 1/2, 2/4 y 4/8 ... son un conjunto de fracciones equivalentes

etc.



Ahora bien, las fracciones equivalentes se pueden calcular por medio de dos procedimientos:

1- Por amplificación

2- Por simplificación

1- Por ampliación:

Se procede a multiplicar el numerador y denominador por un mismo número.

Por ejemplo:

"encontrar 3 fracciones equivalentes a 2/3"

amplificamos 2/3, multiplicando numerador y denominador por un mismo número:

$$\frac{2}{3}\ \begin{matrix}(x\ 3)\\(x\ 3)\end{matrix} = \frac{6}{9}\ \begin{matrix}(x\ 5)\\(x\ 5)\end{matrix} = \frac{30}{45}\ \begin{matrix}(x\ 2)\\(x\ 2)\end{matrix} = \frac{60}{90} \quad \ldots \text{ etc.}$$

2- Por simplificación:

Se procede a dividir el numerador y denominador por un mismo número.

Por ejemplo:

"encontrar 2 fracciones equivalentes a 24/32"

simplificamos 24/32 dividiendo numerador y denominador por un mismo número:

$$\frac{24}{32}\ \begin{matrix}(:\ 2)\\(:\ 2)\end{matrix} = \frac{12}{16}\ \begin{matrix}(:\ 4)\\(:\ 4)\end{matrix} = \frac{3}{4}$$

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$/$ = tal que

$\in$ = pertenece

$\notin$ = no pertenece

ϕ = conjunto vacío

$\bar{A}$ = complemento de A

$\subset$ = incluído

$\not\subset$ = no incluído

$\cap$ = intersección

$\cup$ = unión

$\Rightarrow$ = implica

$P(A)$ = conjunto de partes de A o familia de partes de A

$\vee$ = o (incluye) los elementos de ambos conjuntos y los comunes a los dos conjuntos

$\wedge$ = y (incluye los elementos comunes a ambos conjuntos)

$\mathcal{R}$ = conjunto referencial o universal

- BIBLIOGRAFÍA

* Papy, *"Matemática Moderna"*. Tomo I - Editorial EUDEBA. Abril 1969.

* Tapia, Nelly Vazquez de; Alicia Tapia de Bibiloni, Carlos Alberto Tapia. *"Matemática 1"* (nivel medio), Editorial Estrada. Bs. As. 1979.

* Picard, Nicole, *"La Matemática Moderna en los primeros grados"* - Editorial Estrada. --- Buenos Aires, 1970.

* Gabba Pablo J. *"Matemática para Maestros"* - Editorial Marimar - Mayo 1974.

* Dienes, Zoltan Paul. *"Actividades Matemáticas pre-numéricas"* - *"Juegos con materiales estructurados en la Actividad Matemática"* - Gram Editora - Bue-- nos Aires, Abril 1977.

* Palacios, Alfreso Raûl, Giordano, Emilio Hêctor. *"Las representaciones gráficas en la - Actividad Matemática"* - Gran Editora - Buenos Aires, Setiembre 1976.

Eva | 4